**Microfacet Model and Physically Based Shading**

练孙鸿

**渲染方程(The Rendering Equation)**

这一段留着外文翻译讲。

**BxDF理论** 渲染方程在不同文献里面有不同的写法和符号记法，下面是一种可行的写法[Wikipedia-RE]：

其中是从位置处沿着方向出射的总辐射亮度(radiance)；从位置处沿着方向出射的自发光的辐射亮度(radiance)；是BRDF（后文会解释）；是沿着方向入射到位置的辐射亮度(radiance)；是两个归一化向量的点积，其中是入射方向的反向向量，是位置处的表面法线(surface normal)。注意这里如果如果是入射方向本身的话，的符号就会与预期的不一致，预期是点积结果等于入射角的余弦值。

给定入射光的入射方向和强度，我们需要求出出在某个出射方向上光的辐射亮度。在辐射度学(Radiometry)里面，一般用[Nicodemus65]**双向反射分布函数**（**BRDF**，Bidirectional Reflectance Distribution Function）来描述物体表面对光的反射。给定入射的光线方向、出射的观察方向，则BRDF的定义是：

其中是辐射亮度(radiance)，单位为；是辐射照度(irradiance)，单位为。所以BRDF就是出射辐射亮度(radiance)的微分与入射辐射照度(irradiance)的微分的比值。注意到辐射亮度实质上就是单位立体角(unit solid angle)上辐射照度，即：

其中为辐射通量(radiant flux)，单位与功率密度一致，均为J/s；为单位表面积；为单位立体角。

BRDF被用于对光与物质表面反射的建模，它抽象了光与物质的交互。但BRDF只是一个框架、范式，具体的BRDF函数还需要进行更细致的推导。但一般情况下，BRDF只能捕捉光与物体表面的反射行为，更复杂的光线交互行为我们要用BRDF的变体来建模。例如次**表面散射**(SSS，Sub-Surface Scattering)，光线从点处入射之后，在物体内部多次折射，然后从另外一个位置出射，这个光学现象无法直接用BRDF建模，而是用BRDF的一个泛化版本：[Nicodemus77]**双向次表面散射反射分布函数**(BSSRDF，Bidirectional Sub-surface Scattering Reflectance Distribution Function)。BSSRDF的参数增加了入射位置与出射位置。



图：光通过手指内部时的次表面散射现象

实际上，次表面散射和和漫反射本质上是同一种现象，都是光线在物体内部的散射(Scatter)。但SSS和漫反射是在不同尺度的上建模，当观察尺度比较宏观时，即成像器的一个像素远大于散射的出射区域，一定区域内的散射出射光线可以近似地看作在同一个点出射，从而把这种现象建模为**漫反射**(Diffuse reflection)。

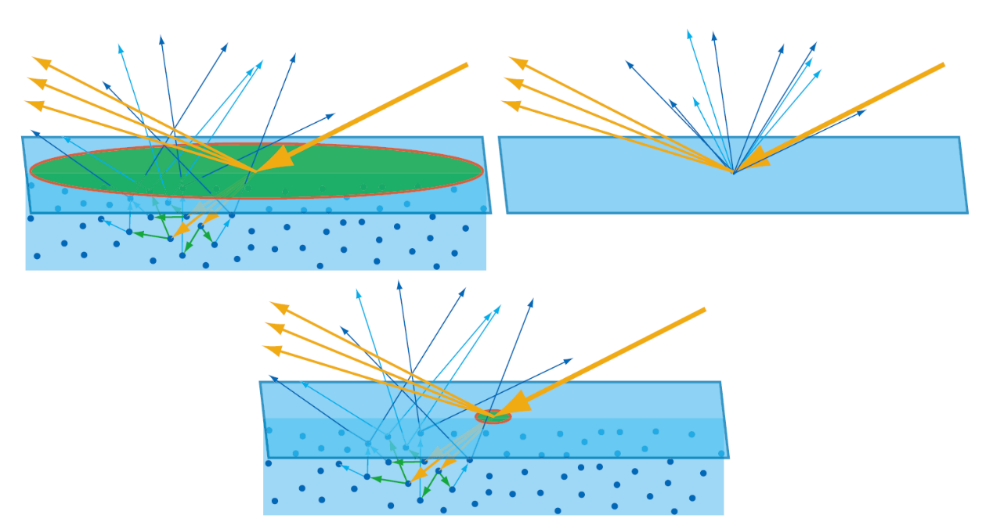
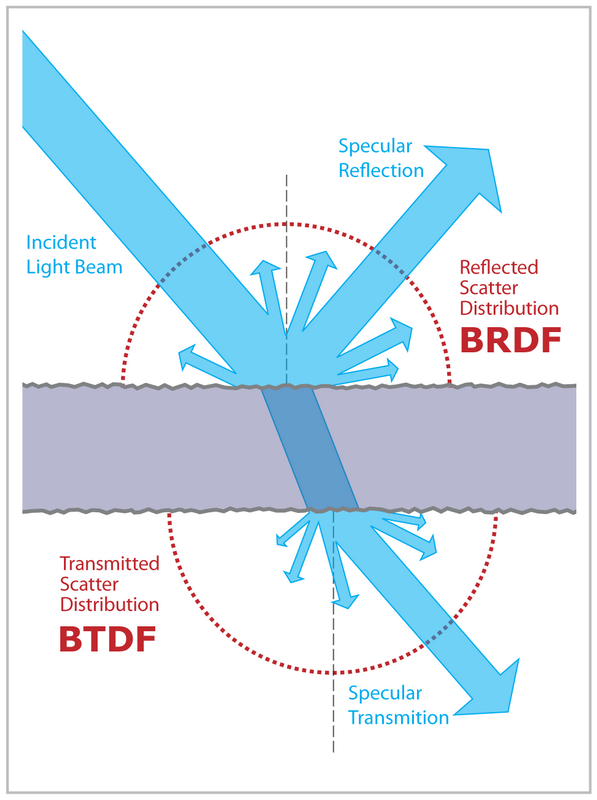


图:光线的次表面散射在不同尺度下被建模为不同的现象

<https://blog.csdn.net/poem_qianmo/article/details/85239398>

但还有一些现实世界的现象不能被原始版本的BRDF很好地描述。例如在真实世界中，物体在不同位置上的材质一般不会完全相同，例如道路上某些地方覆盖有一层积水，那么有积水的地方的镜面反射就要更加强。这种BRDF在物体不同空间位置不断变化的现象，我们用随着空间位置变化而变化的BRDF（SVBRDF，Spatial Varying BRDF）来描述。但即使BSSRDF、SVBRDF已经看起来足够复杂了，还是有些光学现象是BRDF及其变体都描述不了的，如光的偏振（Polarization）、光的透射（Transmission）。在一般的场景渲染里面，我们会假设忽略掉光的偏振。但在离线的真实感渲染里面，我们就要处理透射与折射，这是BRDF不能处理的，因为入射光线不止反射，还有透射、折射。我们需要用[Bartell81]**双向透射分布函数**（BTDF，Bidirectional Transmission Distribution Function）来描述入射到物体内部的光线的交互。BRDF与BTDF一同构成了**双向散射分布函数**（BSDF，Bidirectional Scattering Distribution Function）。



图：入射到物体表面的光线一部分被反射，一部分被透射

**BRDF的性质** 如果我们要然渲染效果更具真实感，那么我们就必须要让BRDF符合物理规律。所以基于物理(Physically Based)建模的BRDF需要满足两个约束：

第一个是**亥姆霍兹互反性（Helmholtz Reciprocity）**：BRDF的入射方向和出射方向参数可以对换，且参数对换之后BRDF的值扔保持不变。即：

这一个约束最直观的解释就是“光路可逆”。但虽然这一条原则是基于物理的，但是很多渲染算法里面的BRDF都在不严重影响视觉效果的前提下违背了这一条法则。

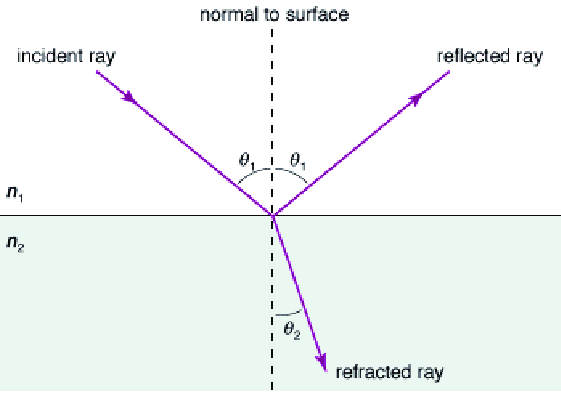
第二个是**能量守恒(Energy Conservation)**：在不计物体自发光的情况下，出射光的能量不大于入射光的能量。我们可以用一个叫**方向半球反射率**（Directional Hemi-spherical reflectance）的函数作为衡量BRDF能量守恒性的指标。被定义为辐射出射度(radiant exitance)的微分与入射辐射照度(irradiance)的微分的比值，即：

其中辐射出射度的量纲与辐射照度一致。与BRDF有联系，是BRDF在光线出射的半球面上对出射立体角的积分：

且在能量守恒的情况下，。

**菲涅尔反射(Fresnel Reflection)**

一个物体的表面是两种不同的物质的分界面：空气与物质本身。光入射到物质分界面的行为可以通过一些几何光学的公式来求解。光在两个不同的光学媒介的交界面的几何光学的交互行为可以由在19世纪被Augustin-Jean Fresnel导出的的**菲涅尔方程(Fresnel Equation)**来描述。[Paschotta08]菲涅尔方程描述了光线在两个具有均匀折射率(refractive index/ index of refraction)的界面上的**反射与透射光线的振幅强度系数**。也就是说，菲涅尔方程描述了光线入射到两种介质的交界面时，产生的反射光与折射光的能量比例。它是电磁学的麦克斯韦方程组(Maxwell’s Equation)在边界条件下（平滑的表面）的特解。



图：光在通过两种光学介质的交界面时，一般会同时产生折反射光与射光

菲涅尔方程考虑了光的偏振(Polarization)的情况，但在实际的渲染应用当中，偏振对视觉效果的影响可以说是微乎其微的。所以在光线跟踪的项目里面，我们一般可以假设光没有偏振(unpolarized)，只考虑其能量强度。设为入射光与反射光侧的介质的折射率(index of refraction)，为折射光（透射光）侧的介质的折射率，分别为光的偏振(s polarization)的透射与反射振幅系数，分别为光的偏振(s polarization)的透射与反射振幅系数，则：

https://www.rp-photonics.com/fresnel\_equations.html

[Cook-Torrance82]的Fresnel反射项也

Brewster’s Angle

斯涅尔定律（Snell’s Law）：可用多种方法导出，如费马的光程最短原理(Fermat’s Principle)、惠更斯原理（Huygen’s Principle，次级子波理论）、电磁学的麦克斯韦方程组的边界条件。

描述反射和折射的比例

RTR chap7

PBR chap8.2

**Cook-Torrance反射模型(Microfacet Model)**

Microfacet Theory



https://learnopengl-cn.github.io/07%20PBR/01%20Theory/

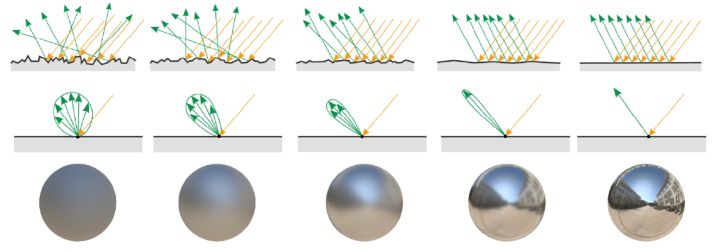
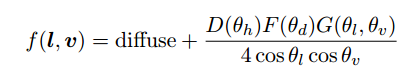


图 微平面粗糙度对材质外观的影响。（图片来自Moving Frostbite to PBR，SIGGRAPH 2014）



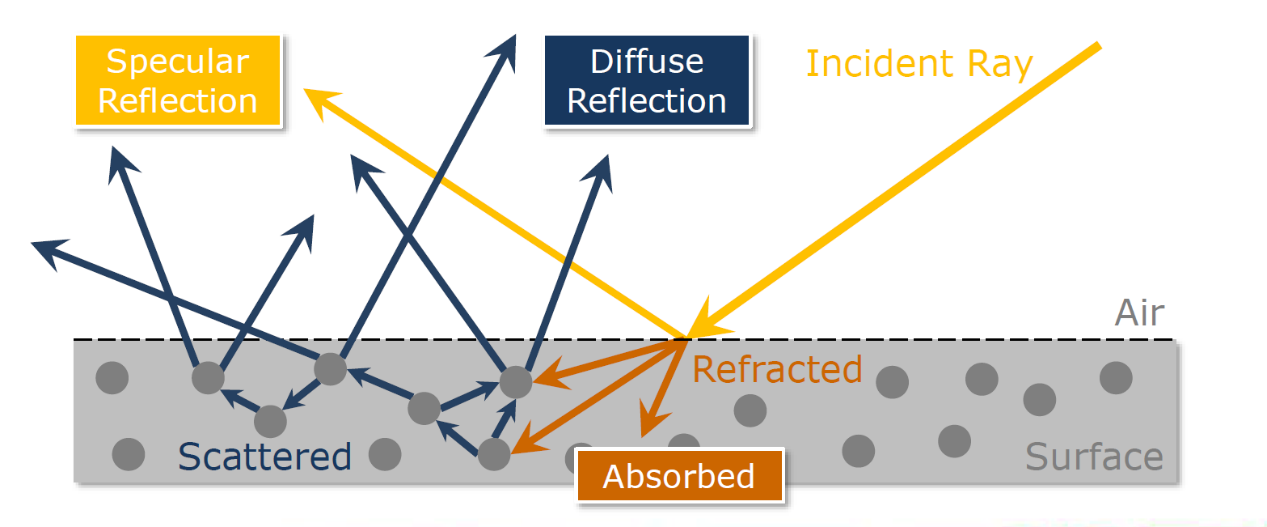
(physically based rendering at Disney)

Specular BRDF

D:Normal Distribution Function，法线分布函数

G:Geometry Function，几何、遮挡项

F：Fresnel Equation，菲涅尔方程/菲涅尔反射项



CT82非偏振光时的F0近似

[1]Cook R L, Torrance K E. A reflectance model for computer graphics[C]// 1981:307-316.

[2] JoeyDeVries, PBR : Theory[DB/OL] <https://learnopengl-cn.github.io/07%20PBR/01%20Theory/> ,2019-3

[3]Marco Alamia, Physically Based Rendering: Cook-Torrance[DB/OL]http://www.codinglabs.net/article\_physically\_based\_rendering\_cook\_torrance.aspx,2019-3

[4]Ratkovic J. , Physically Based Rendering[D]//Univeristy of Zagreb, Apr 2017

[5] Nicodemus F E . Geometrical Considerations and Nomenclature for Reflectance[J]. Monograph, 1977, 161.

[6]Wikipedia, Rendering Equation[DB/OL] <https://en.wikipedia.org/wiki/Rendering_equation>, 2019-4

[7] Bartell F O , Dereniak E L , Wolfe W L . The theory and measurement of bidirectional reflectance distribution function (BRDF) and bidirectional transmittance distribution function (BTDF)[J]. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1981, 257:154-160.

[8]Nicodemus F E . Directional Reflectance and Emissivity of an Opaque Surface[J]. Applied Optics, 1965, 4(7):767-773.

[9] Paschotta R. , Fresnel Equation[M] Encyclopedia of Laser Physics and Technology, 1. edition October 2008, Wiley-VCH, ISBN 978-3-527-40828-3

https://zhuanlan.zhihu.com/p/33464301

Physically Based Rendering at Disney.

很多种可选的Cook-Torrance反射模型的D、G、F项的reference，可以引用下：

<http://graphicrants.blogspot.com/2013/08/specular-brdf-reference.html>

GGX[EG2007] <http://www.cs.cornell.edu/~srm/publications/EGSR07-btdf.pdf>，可参考其Microfacet Theory的简介

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/56967462>

RTR chap7